J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 6, No.2, 115-119, Januari 2010
ISBN:1858-1382

Karaktristik Ideal Prim Minimal dalam Gelanggang Operator Differensial

Amir Kamal Amir*

Abstrak

Misalkan *R* adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu endomorfisma dari *R*, dan δ adalah suatu σ- derivatif. Gelanggang polinom miring, disimbol dengan $R[x;\sigma,\delta]$, dalam peubah tak diketahui *x*, adalah gelanggang yang terdiri dari polinom seperti $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_0$ yang memenuhi aturan perkalian $xa=\sigma(a)x+\delta(a),\forall a\in R$. Dalam hal $\sigma=1$ atau σ adalah suatu endomorfisma identitas, gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ disebut gelanggang operator differensial dan ditulis $R[x;\delta]$. Dalam paper ini akan diuraikan secara rinci karakteristik dari ideal-ideal prim minimal dari gelangang $R[x;\delta]$ dengan asumsi bahwa *R* adalah suatu daerah komutatif Dedekind.

Kata Kunci: *Differensial, ideal.*

1. Pendahuluan

Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang terdiri dari polinom-polinom dengan aturan perkalian yang tidak bersifat komutatif. Dalam teori sistem kontrol, gelanggang polinom miring digunakan untuk mentransfer sistem kontrol klasik ke dalam sistem kontrol linier abstrak (aljabar). Selanjutnya pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier diterjemahkan menjadi pengkajian struktur, sifat, dan kelakuan sistem linier abstrak terkait, misalnya dengan memanfaatkan pengetahuan aljabar. Dengan demikian, pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier, yang banyak digunakan dalam dunia aplikasi akan sangat terbantu jika kita mengetahui dengan baik sifat-sifat dan struktur gelanggang polinom miring tersebut.

Pengkajian tentang struktur gelanggang polinom miring, yang dinotasikan dengan $R[x,\sigma,\delta]$, untuk kasus gelanggang tumpuan R berupa daerah Dedekind sudah dilakukan. Sejumlah hasil mengenai pusat, ideal maksimal, dan ideal prima dari gelanggang polinom miring untuk kasus $\delta=0$, dinotasikan dengan $R[x,\sigma]$, telah banyak dikembangkan. Dalam paper ini, akan diuraikan karakteristik ideal prim minimal gelanggang polinom miring $R[x,\sigma,\delta]$ dengan $\sigma=1$ dan $\delta\neq 0$.

Secara lengkap pengertian gelanggang polinom miring disajikan berikut (Goodearl & Warfiled, 1989; McConnel & Robson, 1987). Misalkan R suatu gelanggang, σ suatu endomorfisma di R, dan δ suatu σ-derivatif, yaitu:

1. δ suatu endomorfisma grup di *R*.

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10, Tamalanrea, Makassar, email: amirkamalamir@yahoo.com.*

2. $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$ untuk setiap $a, b \in R.$

Gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ dalam variabel tak diketahui x berisi semua polinom dengan koefisien di R yang memenuhi aturan perkalian sebagai berikut: untuk setiap $a \in R$ berlaku $xa = \sigma(a)x + \delta(a).$ Untuk kasus khusus dimana $\delta = 0$, gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ ditulis $R[x;\sigma]$. Struktur dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ $(\delta \neq 0)$ sangat berbeda dengan $R[x;\sigma]$ $(\delta = 0).$ Berikut ini diberikan ilustrasi.

Contoh 1. Misalkan $R = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in Z\}$. Automorfisma σ pada R didefinisikan sebagai $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5},$ untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in R.$ Selanjutnya pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b,$ untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in R.$ Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat σ-derivatif. Dengan demikian, $R[x;\sigma,\delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring. Gelanggang ini tidak bersifat komutatif. Perhatikan proses perkalian antara $f(x) = 4 - 2\sqrt{-5}$ dengan $g(x) = 3 + 5\sqrt{-5}$ berikut ini.

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left[(4-2\sqrt{-5})x\right]\left[(3+5\sqrt{-5})x\right] \\
&= (4-2\sqrt{-5})\left[x(3+5\sqrt{-5})\right]x \\
&= (4-2\sqrt{-5})\left[\sigma(3+5\sqrt{-5})x + \delta(3+5\sqrt{-5})\right]x \\
&= (4-2\sqrt{-5})(3-5\sqrt{-5})x^2 + (4-2\sqrt{-5})5x \\
&= (-38-26\sqrt{-5})x^2 + (20-10\sqrt{-5})x \\
g(x)f(x) &= \left[(3+5\sqrt{-5})x\right]\left[(4-2\sqrt{-5})x\right] \\
&= (3+5\sqrt{-5})\left[x(4-2\sqrt{-5})\right]x \\
&= (3+5\sqrt{-5})\left[\sigma(4-2\sqrt{-5})x + \delta(4-2\sqrt{-5})\right]x \\
&= (3+5\sqrt{-5})(4+2\sqrt{-5})x^2 + (3+5\sqrt{-5})(-2)x \\
&= (-38+26\sqrt{-5})x^2 + (-6-10\sqrt{-5})x
\end{aligned}
$$

Perkalian di atas menunjukkan bahwa $f(x)g(x) \neq g(x)f(x).$ Perkalian di atas juga menunjukkan dengan jelas bahwa peranan σ sangat mempengaruhi struktur dari gelanggang polinom miring. Tulisan ini akan menguraikan tentang karkateristik ideal prim minimal gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ dengan mengambil $\sigma = 1$. Gelanggang polinom miring seperti ini cukup ditulis $R[x;\delta]$ dan lebih dikenal dengan nama *gelanggang operator differensial*. Untuk hal $\delta = 0$, gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\sigma]$. Sedangkan untuk kasus $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$ gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x]$, yang merupakan gelanggang polinom biasa.

Contoh 2. Misalkan R adalah gelanggang polinom biasa dengan elemen tak diketahui y, $F(y)$, dengan F adalah lapangan dengan karakteristik nol, maka $R[x;\delta]$ merupakan gelanggang operator differensial untuk $\delta = y\dfrac{d}{dy}$.

Dalam gelanggang operator differensial $R[x;\delta]$ dikenal istilah δ-ideal dan δ-prime ideal. Pengertian dari istilah-istilah tersebut dipaparkan pada definisi berikut ini.

Definisi 1.
Misalkan $R[x;\delta]$ adalah suatu gelangang operator differensial. Suatu δ-ideal dari R adalah suatu ideal I dari R sedemikian sehingga $\delta(I) \subseteq I$. Suatu δ-prime ideal adalah suatu δ-ideal murni I dari R sedemikian sehingga jika J, K adalah δ-ideal yang memenuhi $JK \subseteq I$, maka $J \subseteq I$ atau $K \subseteq I$.

2. Ideal Prim Minimal dalam Gelanggang Operator Differensial

Dalam bagian ini akan dipaparkan secara rinci bentuk ideal-ideal (prim) dari gelanggang operator differensial $R[x;\delta]$ dengan *R* adalah suatu gelanggang komutatif Dedekind. Sebagai langkah awal, disajikan dulu bentuk-bentuk ideal secara umum.

Teorema 1.
Misalkan R adalah suatu gelanggang, δ adalah suatu derivatif dari R, dan $S = R[x;\delta]$ adalah gelanggang operator differensial, maka
a. Jika I adalah suatu ideal kanan dari R, maka IS adalah suatu ideal kanan dari S.
b. Jika I adalah suatu δ-ideal dari R, maka IS adalah suatu ideal dari S.
c. Jika J adalah suatu ideal dari S, maka $J \cap R$ adalah suatu δ-ideal dari R.

Bukti:
a. Misalkan *I* adalah suatu ideal kanan dari *R*, $af(x) \in IS$, dan $g(x) \in S$. Dari sini diperoleh $\left(af(x)\right)g(x) = a\left(f(x)g(x)\right) \in IS$ karena $f(x)g(x) \in IS$. Jadi *IS* merupakan ideal kanan dari *S*.
b. Misalkan *I* adalah suatu δ-ideal dari *R*, berarti $\delta(I) \subseteq I$. Ambil $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_nx^n \in IS.$ Ini berarti bahwa $f_i \in I, \forall i$. Misalkan $g(x) = g_0 + g_1x + \cdots + g_mx^m \in S$, akan ditunjukkan bahwa $f(x)g(x) \in IS$ dan $g(x)f(x) \in IS$. Karena $f_i \in I$ dan $f_ig(x) \in S$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa $f(x)g(x) \in IS$. Selanjutnya, dengan memperhatikan bentuk dari $\delta(a^m)$, yaitu $\delta(a^m) = \sum_{i=0}^{m-1} \sigma(a)^i \delta(a) a^{m-1-i}$ (Goodearl, 1992) dan mengingat bahwa $\delta(I) \subseteq I$, maka dengan mudah juga dapat disimpulkan bahwa $g(x)f(x) \in IS$.
c. Ambil $a \in J \cap R$, maka $a \in J$, sehingga $ax, xa \in J$ karena *J* adalah suatu ideal dari *S*. Dengan demikian $ax - xa \in J$, sehingga $\boldsymbol{\partial(\alpha) = ax - xa \in J}$. ■

Ideal-ideal dalam gelanggang operator differensial selalu memuat konstanta. Hal ini ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 2.
Misalkan R adalah suatu daerah integral komutatif dengan karakteristik nol, δ *adalah suatu derivatif dan* $S = R[x;\delta]$. *Jika I adalah suatu ideal tak nol dari S, maka* $I \cap R \neq 0$.

Bukti: Pilih elemen tak nol $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_nx^n$ dari *I*. Dalam hal ini diasumsikan $n \geq 1$. Selanjutnya *n* disebut derajat polinom $f(x)$ dan f_n disebut koefisien terdepan. Pilih $a \in R$ sedemikian sehingga $\delta(a) \neq 0$. Dengan menggunakan kesamaan $\delta(a^m) = \sum_{i=0}^{m-1} \sigma(a)^i \delta(a) a^{m-1-i}$ (Goodearl, 1992) dapat diketahui bahwa

$$f(x)a - af(x) = nf_n\delta(a)x^{n-1} + [\,suku\, dengan\, derajat\, kurang\, dari\ n\text{-}1].$$

Karena $nf_n\delta(a) \neq 0$, maka hal ini berarti *I* memuat elemen tak nol dengan derajat *n-1*. Apabila proses tersebut di atas diulangi, maka pada akhirnya kita akan menemukan bahwa *I* memuat elemen tak nol dengan derajat nol. ■

Teorema berikut memberikan sifat dari ideal prim (tidak harus minimal) dari gelanggang operator differensial.

Teorema 3.
Misalkan $S = R[x;\delta]$ *adalah gelanggang operator differensial atas R dengan R adalah daerah Dedekind komutatif, maka P adalah ideal prim minimal dari* $S = R[x;\delta]$ *jika* $P \in Spec_0(S)$.

Bukti: Misalkan *Q* adalah ideal prim dari $S = R[x;\delta]$ demean $Q \subseteq P$. Karena $P \in Spec_0(S)$, maka $Q \in Spec_0(S)$. Gunakan Theorem 10 (Leroy dan Matczuk, 2010) diperoleh bahawa *Q* adalah ideal prim maksimal. Jadi disimpulkan $P = Q$ atau *P* adalah ideal prim minimal. ■

Teorema 4.
Misalkan P adalah ideal prim dari $S = R[x;\delta]$ *dengan char(R) = 0 dan* $P \cap R = p$. *P adalah ideal prim minimal dari* S *jika dan hanya jika* $P = p[x;\delta]$ *dengan p adalah suatu ideal* $\delta -$ *prim minimal dari R.*

Bukti: Misalkan *P* adalah minimal prim ideal dari S dan $P \cap R = p$, maka dari Teorema 2 $p \neq 0$. Dengan menggunakan Theorem 3.1 (Goodearl, 1992), dapat diperoleh bahwa *p* adalah ideal $\delta -$prim dari *R* dan $pS \in Spec(S)$. Jadi $pS = P$ sebab $pS \subseteq P$ dan *P* adalah suatu ideal prim minimal. Pada sisi lain $pS = p[x;\delta]$. Dari sini, diperoleh $P = p[x;\delta]$ dan *p* adalah ideal $\delta -$prim minimal dari *R* oleh Lemma 2 (Amir *dkk*., 2010). Kebalikannya, misalkan $P = p[x;\delta]$ dan *p* adalah ideal $\delta -$prim minimal dari *R,* maka $P = p[x;\delta]$ adalah suatu ideal prim dari S oleh Theorem 3.3 (Goodearl, 1992). Misalkan Q adalah suatu ideal prim tidak nol dari S dengan $Q \subseteq P$. Misalkan $q = Q \cap R$, maka $q \neq 0$ oleh Lemma 29 (Goodearl, 1989) dan $q = Q \cap R \subseteq P \cap R = p.$ Gunakan Theorem 3.1 (Goodearl, 1992), diperoleh q adalah ideal $\delta -$prim dari R. Jika q adalah ideal $\delta -$prim dari R, maka $q = p$ sebab $q \subseteq p$ dan p adalah ideal $\delta -$prim minimal dari R. Jadi, $P = p[x;\delta] = q[x;\delta] \subseteq Q.$ Hal ini mengakibatkan $P = Q.$ Jadi, P adalah ideal prim minimal dari S. ■

Daftar Pustaka

Amir, A.K., Astuti, P., dan Muchtadi-Alamsyah, I. 2010. Minimal prieme ideals of ore over commutative Dedekind domain. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Application*, Vol.16, No.2, March 2010, pp.101-107.

Goodearl, K.R., 1992. Prieme ideals in skew polinomial ring and quantized Weyl algebras. *J. of Algebra*, 150, pp. 324-377.

Goodearl, K.R., dan Warfiled, J.R., 1989. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge University Press, London.

Leroy, A., dan Matczuk, J., 2010. Prime ideal of ore extension. Website: http://leroy.perso.math.cnrs.fr/Articles/Prime%20ideal%20in%20Ore%20extensions.pdf, diakses pada Juli 2010.

McConnel, J.C., dan Robson, J.C., 1987. *Noncommutative Noetherian Rings*. John Wiley & Sons Inc., New York.

Ore, O., 1933. Theory of non-commutative polynomials. *Annals of Math,* 34, pp.480-508.